Ampliación potencias y radicales 3º ESO

Curso 2016_2017

1. ESTIMACIÓN DE RADICALES

Llamaremos **estimar una raíz** a dar una aproximación de ella.

Por ejemplo, $\sqrt{178} \approx 13'4$. Raíz de 178 aproximadamente es 13’4.

2. RADICALES EN FORMA DE POTENCIA

El valor de una raíz equivale a la potencia que resulta de dividir el exponente del radicando entre el índice de la raíz.

Por ejemplo:

$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}$	$\sqrt[2]{2^{-8}}$	$\sqrt[7]{5^3}$	$\sqrt[6]{5}$

Para operar también se puede pasar a esta forma previamente.

Expresa ahora en forma de radical:

$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$7^{\frac{5}{4}}$	$2^{\frac{5}{3}}$

- Efectúa:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

- Por el mismo procedimiento hacemos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8}$$

3. RAÍZ DE UN RADICAL

Una raíz de otra raíz equivale a la raíz que resulta de multiplicar sus índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

- Simplifica la expresión:

$$\left(\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}\right)^6 =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4^3}} =$$

4. RACIONALIZACIÓN

Es el proceso de eliminar un radical de un denominador de una fracción mediante el paso a otra equivalente.

Basta multiplicar en el numerador y en el denominador por un radical adecuado

Ej:

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

• Racionaliza: $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

En el caso de que el denominador contenga una resta simplificaremos utilizando el conjugado.

Ejemplo:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2}$$

5. LOGARITMOS

Surgieron como un método abreviado de cálculo. John Napier (Neper) en el siglo XVII construyó unas tablas en que a cada número le asignaba su exponente en una determinada base. El objetivo era simplificar los cálculos sobre todo astronómicos, trigonométricos. Después se ha visto que también describen fenómenos físicos y resuelven numerosos problemas matemáticos.

Tomemos, por ejemplo, para entendernos mejor, la base 2.

Número	Potencia	Exponente (Logaritmo)
32	2^5	5
16	2^4	4
8	2^3	3
4	2^2	2
2	2^1	1
1	2^0	0
½	2^{-1}	−1
¼	2^{-2}	-2
0	No existe	No existe
-2	No existe	No existe

Diremos que $\log_2 16 = 4$ porque $2^4=16$, etc. Poner todos los de la tabla a continuación:

Según hemos dicho el logaritmo y la exponencial son funciones inversas.

$$3 \underset{\log_2 8}{\overset{2^3}{\rightleftarrows}} 8$$

DEF: El logaritmo de un número es el exponente de dicho número en una base determinada. Se trata de la operación inversa de la exponenciación.

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

¿Por qué simplifican los cálculos?

$8 \cdot 4 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$. Luego el producto de números se convierte en suma de sus logaritmos.

$\frac{8}{4} = \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2}$. Luego la división se convierte en resta.

$8^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2}$. Luego la potencia se convierte en producto.

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3}$. Luego la raíz se convierte en división.

Ejemplo

Pasar a forma logarítmica a la derecha de cada expresión.

- $3^4 = 81$
- $9^2 = 81$
- $3^0 = 1$
- $a^0 = 1$

- $5^1 = 5$
- $a^1 = a$
- $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Neper se dio cuenta que de esta manera se simplificaban mucho las operaciones.

PROPIEDADES OPERATIVAS

- $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
- $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$
- $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$
- $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

PROPIEDADES OPERATIVAS DEMOSTRACIONES

- $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

DEM

Supongamos que $P = a^x$; es decir, que $x = \log_a P$.

De igual forma que Q = a^y ; es decir, que y = $\log_a Q$.

Es claro que

$$P \cdot Q = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Luego,

$$\log_a (P \cdot Q) = x + y = \log_a P + \log_a Q$$

• $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

• $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

• $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$

• $\log_a a = 1$

• $\log_a 1 = 0$

CAMBIO DE BASE

La calculadora suele tener dos logaritmos: log (base 10) y ln (base "e") -llamados logaritmos neperianos-

Para poder hallar otros logaritmos hemos de hacer un cambio de base.

Ejemplo

Imaginemos que tenemos que hallar $\log_2 30$.

Vamos a llamarlo x. Es decir, $\log_2 30 = x$

Por tanto, aplicando logaritmos decimales en esta igualdad tendremos

$$30 = 2^x \rightarrow \log 30 = \log 2^x \rightarrow \log 30 = x \log 2 \rightarrow x = \frac{\log 30}{\log 2}$$

En general,

$$\log_a P = \frac{\log_{10} P}{\log_{10} a}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Una de las utilidades de los logaritmos es la posibilidad de despejar exponentes.

Ejemplo: Resolver $2^x = 7$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. RADICALES

1. Determina el valor de:

$$\text{a) } (-3)^2 \quad \text{b) } 2^{-3} \quad \text{d) } (-2)^3 \quad \text{e) } \frac{1}{2^{-3}} \quad \text{f) } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \quad \text{g) } \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

$$\text{h) } \sqrt{\frac{9}{49}} \quad \text{i) } \sqrt[3]{-125} \quad \text{j) } 3^{2/3} \quad \text{k) } \frac{1}{5^{1/2}} \quad \text{l) } 9^{-1/2} \quad \text{m) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2}$$

2. Simplifica las expresiones siguientes al máximo:

$$\text{a) } \frac{2^{-8}\cdot 16^4}{32} = \quad \text{b) } \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot 2^2 = \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}:\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9}{2}} =$$

3. Pasa las siguientes expresiones de raíces a potencias y después simplifica la potencia resultante:

$$\text{a) } \sqrt{\sqrt[5]{a^4}} = \quad \text{b) } \sqrt{2\sqrt{2}} =$$

4. Pasa las siguientes potencias a su expresión radical y después simplifica el radical al máximo según sus propiedades:

$$\text{a) } \left(a^{5/2}\right)^{2/3} = \quad \text{b) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

5. Opera en forma de potencias y expresa el resultado en forma de raíz:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}} = \quad \text{b) } \frac{a^{3/4}\cdot a^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}} =$$

6. Expresa en forma de potencia simplificando si es posible: $a)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\ b)\ \sqrt{a^{1/2}\cdot a^2}$

7. Expresa en forma de radical: $a.\ 7^{\frac{3}{4}}$ $\quad b.\ 2^{\frac{2}{3}}$ $\quad c. 5^{-\frac{1}{2}}$ $\quad d.\ 3^{-\frac{2}{5}}$

8. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$a)\ 3+4\sqrt[3]{5};\ b)\ 2-a\sqrt[3]{a}\ c)\ 2\cdot x^3\cdot y^2\sqrt[5]{2\cdot x^3\cdot y^4\cdot z}$

9. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$$a)\ 3+x\sqrt[3]{x^2y};\ b)\ 2-2\sqrt[3]{4a}$$

10. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$a)\ 3+4\sqrt[3]{5};\ b)\ 2-a\sqrt[3]{a}\ c)\ 2\cdot x^3\cdot y^2\sqrt[5]{2\cdot x^3\cdot y^4\cdot z}$

2. OPERACIONES CON RADICALES

11. Opera y simplifica:

a) $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}=$ b) $\sqrt{\frac{2}{9}}+\sqrt{\frac{8}{25}}-\sqrt{\frac{2}{225}}=$ c) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}=$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt[4]{4}}=$ e) $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 5}=$ f) $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+2\sqrt{50}}{5\sqrt[3]{2}}=$

12. Efectúa el siguiente producto utilizando la expresión de los radicales en forma de potencia: $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$

13. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{11}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{12}}$

14. Calcula:

a) $\left(5-\sqrt{5}\right)^2=$; b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$;

c) $\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)^2=$; d) $\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)=$

15. Calcula: $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2=$

16. Calcula: $\left(7+\sqrt{7}\right)\cdot\left(7-\sqrt{7}\right)=$

17. Simplifica las expresiones siempre que sea posible:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ *b)* $\sqrt[2]{\sqrt[2]{x}}=2$ *c)* $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}}$ *d)* $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}$

18. Reduce a un solo radical: $a)\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7}}$ $b)\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

19. Racionaliza simplificando: *a)* $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$ *b)* $\dfrac{-12}{\sqrt[5]{9}}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ *d)* $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-3}$

20. Racionaliza y simplifica: $a)\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}};\ b)\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}};\ c)\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

21. Racionalizar y simplificar:

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{5-\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}}$

22. Racionaliza: $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

3. LOGARITMOS

23. Utilizando la definición y/o las propiedades de los logaritmos, calcula:

a) $\log_2 \sqrt{2}$ b) $\log_5 25\sqrt{5}$ c) $\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) $\log\left(\dfrac{1}{100}\right)^3$ e) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ f) $\log_2 0{,}5$

24. Expresa con un único logaritmo:

a) $2\log a+\log b-\log c$ b) $\dfrac{1}{2}(\log a-\log b)$ c) $2\log 3-3\log 2$

25. Utiliza el cambio de base y/o la calculadora para determinar con cuatro cifras significativas:

a) $\log_7 15$ b) $\log_2 11$ c) $\log 18$ d) $\ln 5$ f) $\log\left(\dfrac{8}{3}\right)$ g) $\log_{1/3} 7$

26. Calcula "x":

a) $\log_x 625=4$ b) $\log_x 0{,}01=-2$ c) $5^x=100$ d) $10^x=5$

27. Calcula:

$$a)\log_2 32;\ b)\log_2\sqrt{8};\ c)\log_3 81;\ d)\log_2\frac{16}{\sqrt{32}};\ e)\log_3\sqrt[4]{27}$$

28. Hallar el valor de 'x' en las siguientes expresiones:

$$a)\log_x\frac{1}{3}=-1\quad b)\log x=-3\quad c)\log_2\frac{1}{8}=x$$

29. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\log_2\frac{x}{8}=5\quad b)\log\sqrt[x]{100}=3\quad c)\log_3\frac{1}{x}=-2\quad d)\log_3 81=x$$

30. Desarrolla al máximo utilizando las propiedades del logaritmo:

$a)\ \log_a\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^5}}$ $b)\ \log_a(a^2\cdot\sqrt{a})$

31. Sabemos que log_ak=0'7, ¿cuánto vale? $\log_a k^3 - \log_a \sqrt{k}$

32. Expresa como un solo logaritmo: $3 \cdot \log_3 6 - \log_3 15 + \dfrac{\log_3 64}{2}$

33. Efectúa con la calculadora y redondea a cuatro cifras significativas:

$a.\, 1,41^{-20} \quad b.\, \sqrt[7]{3021} \quad c.\, \sqrt[9]{1,287.10^{-14}} \quad d.\, L\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

34. Utiliza las propiedades y/o la definición de logaritmo para calcular:

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) =$$

35. Expresa en un único logaritmo:

$$2\log a + \frac{1}{2}\log b - \log c =$$

36. Saber aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar una expresión. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\ \log 2^x = 10 \qquad b)\ \log_2 \frac{x}{8} = 5 \qquad c)\ \log \sqrt[x]{100} = 3 \qquad d)\ \log_3 \frac{1}{x} = -2$$

37. Convertir una expresión logarítmica en su exponencial equivalente y viceversa. Hallar el valor de 'x' en las siguientes expresiones: $a)\log_x \dfrac{1}{3} = -1 \ \ b)\log x = -3 \ \ c)\log_2 \dfrac{1}{8} = x$

38. Saber aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar una expresión. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\ \log_2 \frac{x}{8} = 5 \qquad b)\ \log \sqrt[n]{100} = 3 \qquad c)\ \log_3 \frac{1}{x} = -2 \qquad d)\log_3 81 = x$$